**Комплексні числа**

План

1. Множини чисел.
2. Означення комплексного числа. Алгебраїчна форма комплексного числа.
3. Модуль та аргумент комплексного числа. Тригонометрична форма запису комплексного числа.
4. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі.
5. Приклади.
6.
7. Числа, які використовують при лічбі називаються натуральними **N.**

Натуральні числа, число 0 та від’ємні числа називаються цілими **Z**.

Цілі числа та всі дробові складають множину раціональних чисел **Q.**

Будь яке раціональне число можна записати у вигляді нескінченого періодичного десяткового дробу.

$\frac{2}{3}$ = 0, (6) $\frac{10}{7}$ = 1, 42857 (142857)

Будь яке ірраціональне число можна записати у вигляді нескінченого неперіодичного десяткового дробу.

$\sqrt{2}$ = 1,414213562373…..

Раціональні та ірраціональні числа становлять множину дійсних чисел **R**.

Вважають, що існує $\sqrt{-1}$ , якій позначають і та називають уявною одиницею.

і2 = - 1

 **2.**  Означення: Комплексним числом називають вираз вигляду

**z = a + bі** , де а – дійсна частина Re z, b – уявна частина Іm z

Будь яке дійсне число можна записати у вигляді комплексного

4 = 4 + 0.і

Алгебраїчна форма запису комплексного числа

 **z = a + bі**

Якщо b = 0, то z = а – дійсне число

Якщо а = 0, то z = ib – суто уявне число

1. z1 = z2 < = > a1 = a2 b1 = b2

2**.** z = a + i b = 0 < = > а = 0, b = 0

3. z = a + i b та z = a - i b називають спряженими числами.

 **3.** Будь-яке комплексне число можна зобразити на площині 0xу у вигляді точки. А (а; b) з координатами (а; b) і навпаки будь-якій точці М (х;у) відповідає комплексне число z = x + i y.

Площина, на якій зображають комплексні числа називається комплексною площиною.

Вісь ох – дійсна вісь, вісь оу – уявна вісь. Точкам, що лежать на осі ох відповідають дійсні числа, точкам на осі оу – уявні.

Поєднав точку А (а; b) з початком координат отримаємо вектор ОА, який є геометричним зображенням числа z = a + іb. y

 А(а;b)

Розглянемо ОАК. Позичимо кут , r =  r

а = r . cos  в = r . sin  b

z =  0  а x

z = r . cos  + i . r . sin

**z = r . (cos  + i sin ) - тригонометрична форма** запису комплексногочисла, де

r =  - модуль комплексного числа

= arg z – аргумент комплексного числа.

 Аргумент  вважається додатнім, якщо кут відраховується проти годинникової стрілки, від’ємним - якщо за годинниковою стрілкою.

 Аргумент  можна визначити по різному, кожне комплексне число має безліч аргументів.

 **4.** Розглянемо два комплексних числа z1 = a1 +іb2 та z2 = a2 +і b2

 1. Сума комплексних чисел

Щоб додати два комплексних числа, треба додати їх дійсні та уявні частини:

 z = z1 +z2 = a1 + ibі + а2 + ib2 = (а1+ a2) + і (b1 + b2)

2. Різниця комплексних чисел

Щоб відняти два комплексних числа, треба відняти їх дійсні та уявні частини:

 z = z1 - z2 = (a1 – а2) + i(bі - b2)

 3. Добуток комплексних чисел

Щоб помножити два комплексних числа, треба виконати множення многочленів та звести подібні доданки, враховуючи, що і2 = -1

 z = z1 . z2 = (a1 + ibі) (а2 + ib2) = (а1a2 – b1b2) + і . (а1 b2 + b1а2)

 Добуток спряжених чисел:

 (а+іb) . (а – іb) = а2 + b2

4. Частка комплексних чисел

Щоб поділити комплексні числа, треба чисельник та знаменник дробу помножити на число спряжене знаменнику, виконати множення в чисельнику та знаменнику, відповідь розділити на дійсну та уявну частини:

z = 

**5.** Приклади:

Знайти :

z = $\frac{z\_{1} -z\_{2}}{z\_{3}}$ + $z\_{4}$ , якщо $z\_{1}$=2+3i $z\_{2}$= - 4-5i $z\_{3}$= 3-2i $z\_{4}$= $\sqrt{3}$ - $\frac{2}{13}$ - $\frac{23}{13}$i

Відповідь записати у тригонометричній формі.

$z\_{1}$ + $z\_{2}$ = 2+3i – ( - 4- 5i) = 2+3i + 4 + 5i= 6 + 8i

$\frac{z\_{1}- z\_{2}}{z\_{3}}$ = $\frac{6+8i}{3-2i}$ = $\frac{\left( 6+8i\right)( 3+2i)}{\left(3-2i\right)( 3+2i)}$ = $\frac{18+12i+24i+16 i^{2}}{9+4}$ = $\frac{18+12i+24i-16}{13}$ = $\frac{2}{13}$ + $\frac{36}{13}$i

$\frac{z\_{1}- z\_{2}}{z\_{3}}$ + $z\_{4}$= $\frac{2}{13}$ + $\frac{36}{13}$i + $\sqrt{3}$ - $\frac{2}{13}$ - $\frac{23}{13}$ i= $\sqrt{3}$ + i

r = $\sqrt{3+1}$ = 2

 $\sin(φ)$= $\frac{a}{r}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(φ)$= $\frac{b}{r}$ = $\frac{1}{\sqrt{3} }$ => φ = $\frac{π}{6}$

z = 2. ($ \cos(\frac{π}{6})+ i\sin(\frac{π}{6})$ )

**Питання для самоконтролю:**

1. Що таке уявна одиниця?
2. Назвіть алгебраїчну форму комплексного числа?
3. Назвіть тригонометричну форму комплексного числа?
4. Як перейти від алгебраїчної до тригонометричної форми?
5. Як додати, помножити, поділити комплексні числа в алгебраїчній формі?

**Дії над комплексними числами**

План:

1. Множення та ділення комплексних чисел в тригонометричній формі.
2. Показникова форма комплексного числа.
3. Множення та ділення комплексних чисел в показниковій формі.
4. Піднесення до степеня комплексного числа в тригонометричній формі.
5. Знаходження кореня з комплексного числа в тригонометричній формі.
6. Приклади.

 **1. Множення та ділення комплексних чисел в тригонометричній формі**

 Розглянемо два комплексних числа z1 = r1 . (cos 1 + i sin 1),

 z2 = r2 . (cos 2 + i sin 2)

 1.1Знайдемо добуток цих чисел

 z1 . z2 = z1 (cos  + i sin ) . z2 (cos sin ) = z1z2 [(coscos- sin  sin) + i (cos sin  sin cos )] = z1z2 (cos() + i sin ())

 1.2 Знайдемо частку цих чисел:

 = 

 Нехай  => z1 = z . z2

z = 

z . z2  = . z2  . . . .

 за означенням добутку

 =(= r1 . (cos 1 + i sin 1) = z1

1. **Показникова форма комплексного числа**

Розглянемо комплексну функцію вигляду

z = x + iy

Розглянемо показникову функцію u(z) = ez, де ez = ex+iy = ex . (cos y +i sin y) Поставимо у відповідність кожному комплексному числу

z () = ez комплексний вираз u () = ei.

Ці функції мають однакові властивості, тому вважаємо, що, якщо x=0, то

 е iy = cos y +i sin y

 e –iy = cos y - i sin y => cos y = ( е iy + e –iy): 2

 sin y = ( е iy - e –iy): 2 формула Ейлера

Якщо z = r . (cos  + i sin ), то використовував формулу Ейлера, маємо

**z = r eіȹ - показникова форма** комплексного числа

1. **Множення та ділення комплексних чисел в показниковій формі**

Розглянемо два комплексних числа z1 = r1 eіȹ та z2 = r2 eіȹ

Щоб помножити два комплексних числа в показниковій формі. Треба модулі помножити, а аргументи додати.

Щоб поділити два комплексних числа в показниковій формі треба модулі поділити, а аргументи відняти.

**4. Піднесення до степеня комплексного числа в тригонометричній формі**

 Розглянемо комплексне число z = r (cossin)

Знайдемо z2:

 z2 = z . z = r (cossin) . r (cossinr2 (cos 2+sin2 )

**zn = rn (cos n+ sin n) формула Муавра**

**Приклад:**

- Знайти (1 + *i* )30

1 + *i* = 

(1 + *i*)30 = (= ()30 (cos) = 215 (cos(6) +

+ *i* sin (6)) = 215 (cos)

Якщо r = 1, то

(сos +*i* sin)n = cos n + sin n = cos n + *i* sin n

n = 2

(сos +*i* sin)2 = cos2 + *2i cossin* - sin2= cos2 + *i* sin2

 комплексні числа дорівнюють тоді і тільки тоді, коли дорівнюють відповідно дійсна та уявна частини, тому

 cos 2 = cos2 - sin2

 sin 2 = 2 cossin

**5. Знаходження кореня з комплексного числа в тригонометричній формі**

Означення: Коренем n-го степеня з числа z називається будь-яке комплексне число u для якого

un = z 



r (cos) = 

Якщо комплексні числа однакові, то однакові модулі, а аргументи відрізняються на 2

 n

Звідси  

R = 0; n = 1 – для інших значень R значення sin i cos будуть збігатися.

**Приклад:**

Знайти 

)

R = 0 . . . 5

uo = = 2 (cos)

u = = )

u2 =  = )

u3 = )

u4 = )

u5 = )

**Питання для самоконтролю:**

1. Назвіть показникову форму комплексного числа.
2. Як помножити або поділити комплексні числа в показниковій формі?
3. Як помножити або поділити комплексні числа в тригонометричній формі?
4. Як піднести комплексне число до степеня?
5. Як знайти корінь з комплексного числа?