**Матриці. Види матриць**

План:

1. Визначення матриці.

2. Види матриць.

3. Лінійні операції над матрицями.

4. Множення матриць.

5. Приклади.

**1. Означення:** Матрицею розмірів m на n називається сукупність m ×n чисел, які розміщені у вигляді прямокутної таблиці, що містить m рядків і n стовпців.

 а11  а12 . . . а1n

А = a21 a22 . . . a2n

 am1 am2 . . . amn

або скорочено А = || аіj ||, (і =1,n j = 1,m)

Числа аіj, які утворюють дану матрицю, називаються її елементами.

**2.** Якщо дві матриці мають однакову кількість рядків і стовпців, то вони називаються матрицями однакового розміру.

Якщо А = || аіj||, В = || bіj||, то А = В означає, що аіj= bіj

Матриця, яка складається з одного рядка, називається **вектор-рядком**, з одного стовпця – **вектор – стовпцем**.

Матрицю, всі елементи якої дорівнюють 0, називають **нульовою** і позначають 0.

Якщо кількість рядків і кількість стовпців однакова, то матрицю називають **квадратною** n-го порядку.

Квадратні матриці, у яких відмінні від 0 лише елементи головної діагоналі, називають **діагональними** матрицями.

А = diag (a11; а22 . . . .аnn)

Якщо всі елементи діагональної матриці рівні, то матрицю називають **скалярною**, якщо всі елементи дорівнюють 1 - то **одиничною** і позначають **Е.**

**Трикутні** матриці, це матриці вигляду

 а11  а12 а13 а11 0 0

В = 0 a22 a2n С = а21  а22 0

 0 0 a33  а31 а32 а33

 **3. Транспонування матриці** – це переміна місцями рядків і стовпців зі збереженням нумерації.

 Аτ = (аіj τ) =( аjі)

Якщо А = Аτ, то матриця А називається **симетричною**.

Нехай матриці А= || аіj || і В=|| bіj || однакового розміру

**Означення:** **Сумою** двох матриць А та В називається матриця С = || сіj|| елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів А і В.

|| сіj||, =|| аіj + bіj||,

Матриця (-1) А = - А є протилежною матриці А

А + (-А) = 0

Для довільних матриць А, В, С та будь яких чисел α, β справедливі співвідношення:

1. А + В = В + А
2. А + ( В + С ) = ( А + В ) + С
3. А + О = А
4. α ( А + В ) = αА + αВ
5. А + ( - А ) = О
6. α (βА) = (αβ)А
7. (α + β)А = α А + βА
8. Е × А = А

**Добутком** матриці А = || аіj|| на число α називається матриця вигляду

αА = || α аіj||

 **4.** Добуток матриць А та В визначений за умови, що кількість стовпців матриці А дорівнює кількості рядків матриці В.

Нехай дана матриця А розміру m × n та матриця В розміру n × p

А = || аіj || В = || bjk || ,

i = 1,m j = 1,n k =1,p

 **Означення: Добутком** АВ матриць називається матриця С = || сір || , у якої

 сір = ai1b1k + ai2 b2k + . . . . . .+aij bjk

Властивості:

1. А(ВС) = (АВ)С
2. α(АВ) = (αА)В
3. С(А+В) =СА + СВ
4. (А +В)С = АС + ВС

Приклад:дані дві матриці А і В, знайти матрицю С=АВ

 А =$ \left(\begin{matrix}3&-2\\0& 5\\4& 0\end{matrix}\right)$ В = $\left(\begin{matrix} 1& 2& 3& 4\\-1&-2&-3&-4\end{matrix}\right)$

 3 . 1 + (-2) . (-1) 3 . 2 + (-2) . (-2) 3 . 3 + (-2) . (-3) 3. 4 + (-2) . (-4)

С = 0 . 1 + 5 . (-1) 0 . 2 + 5 . (-2) 0 . 3 + 5 . (-3) 0 . 4 + 5 . (-4)

 4 . 1 + 0 . (-1) 4 . 2 + 0 . (-2) 4 . 3 + 0 (-3) 4 . 4 + 0 . (-4)

Щоб отримати першу строчку беремо елементи 1-ої строки, множимо поступово на елементи всіх стовпців.

Щоб отримати перший стовпець беремо елементи 1 стовпця, множимо на елементи всіх рядків.

**А . В ≠ В . А**

* Чи завжди можливо виконати А ×А?
* Якщо можливо А × В та В ×А, то А і В – квадратні матриці, але

 А× В ≠ В × А

 **5. Приклади:**

Знайти АВ - ВА, якщо

а) А=$\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{1 2}{4 -1}\right) $В=$\left(\begin{matrix}2&-3\\-4&1\end{matrix}\right)$

б) А=$ \left(\begin{matrix}2&3& 1\\-1&1& 0\\1&2&-1\end{matrix}\right)$ В=$ \left(\begin{matrix}1&2&1\\0&1&2\\3&1&1\end{matrix}\right)$

Питання для самоконтролю.

1. Дайте означення матриці.

2. Які види матриць ви знаєте ?

3. Як додати дві матриці ? За яких умов це можливо ?

4. Як помножити матриці ? За яких умов це можливо ?

5. Які матриці називаються транспонованими ?

**Визначник матриці. Обернена матриця**

План:

1. Означення визначника.

2. Властивості визначників.

3. Методи обчислення визначників.

4. Обернена матриця.

5. Приклади.

**1.** **Визначник** (детермінант) квадратної матриці А – це число яке ставиться у відповідність матриці А і може бути виражене через її елементи.

| А | - позначення визначника

Квадратна матриця називається **невиродженою**, якщо її визначник не дорівнює 0.

Матриця порядку n = 1 складається з одного елементу і її визначник вважається таким, що дорівнює цьому елементу.

Приклад:

Обчислити визначник

| А | = $\left|\begin{matrix}1&2\\3&4\end{matrix}\right|$ = 1. 4 – 2.3 = 4 – 6 = - 2

**2.** **Властивості** **визначників:**

1. При транспонуванні матриці значення її визначника не змінюється.
2. Визначник, що має два однакових рядка або стовпця, дорівнює 0.
3. Якщо всі елементи деякого рядка або стовпця матриці мають спільний множник, то його можна винести за дужки (за визначник).
4. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) дорівнюють 0, то її визначник дорівнює 0.

 **3. Деякі методи обчислення визначників.**

* 1. Перетворення в нуль всіх елементів рядка (стовпця), крім одного.

$\left|\begin{matrix}2&5&7\\2&8&5\\8&7&3\end{matrix}\right|$ =2× $\left|\begin{matrix}1&5&7\\1&8&5\\4&7&3\end{matrix}\right|$ = 2×$\left|\begin{matrix}1&5&7\\0&3&-2\\0&-13&-25\end{matrix}\right|$ = 2×1×$\left|\begin{matrix}3&-2\\-13&-25\end{matrix}\right| $=

 = 2 . (-75 – 26) = 202

3.2 Метод зведення до трикутного вигляду

 1 2 3 4 5 1 2 3 4 5

 -1 0 3 4 5 0 2 6 8 10

| A| = -1 -2 0 4 5 = 0 0 3 8 10 = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 120

 -1 -2 -3 0 4 0 0 0 4 9

 -1 -2 -3 -4 0 0 0 0 0 5

* 1. Метод зведення до обчислення визначників другого порядку:

| A| = $\left|\begin{matrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{matrix}\right|$ = 1× $\left|\begin{matrix}5&6\\8&9\end{matrix}\right|$ - 2× $\left|\begin{matrix}4&6\\7&9\end{matrix}\right|$ + 3× $\left|\begin{matrix}4&5\\7&8\end{matrix}\right|$ = 1. ( 45 – 48) -

– 2.( 36 – 42) + 3. (32 – 35) = - 3 +12 – 9 = 0

 **4.** Квадратна матриця В називається **оберненою** до квадратної матриці А, якщо А × В = В × А = Е

Обернену матрицю до А позначимо А-1.

Для невиродженої матриці

А-1 = $\frac{1}{ǀА ǀ}×\left(Аіj \right), $де Аіj  - алгебраїчні доповнення елементів а*іj*

**Теорема.**  Для того, щоб для матриці А існувала обернена А-1 необхідно і достатньо, щоб визначник не дорівнював нулю ( |А| ≠ 0)

Приклад:

Знайти обернену матрицю до матриці А

 А = $\left(\begin{matrix}1&-1&1\\2&1&1\\1&1&2\end{matrix}\right)$ | A| = 5

Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці А

А11 =$ \left|\begin{matrix}1&1\\1&2\end{matrix}\right|$ = 1 А21= $\left|\begin{matrix}-1&1\\1&2\end{matrix}\right|$ = 3 А31 = $\left|\begin{matrix}-1&1\\1&1\end{matrix}\right|$ = -2

 А12 = $\left|\begin{matrix}2&1\\1&2\end{matrix}\right|$ = -3 А22 = $\left|\begin{matrix}1&1\\1&2\end{matrix}\right|$ = 1 А32 = $\left|\begin{matrix}1&1\\2&1\end{matrix}\right|$ = 1

 А13 = $\left|\begin{matrix}2&1\\1&1\end{matrix}\right|$ = 1 А23 = $\left|\begin{matrix}1&-1\\1&1\end{matrix}\right|$ = 2 А33 = $\left|\begin{matrix}1&-1\\2&1\end{matrix}\right|$= 3

Алгебраїчні доповнення, у яких сума цифр нумерації непарна, знаки змінюють на протилежні.

Обернена матриця має вигляд :

А-1 = $\frac{1}{5}$ $\left|\begin{matrix}1&3&-2\\-3&1&1\\1&2&3\end{matrix}\right|$

**5.Приклади:**

Обчислити визначники

 1 2 3 1 2 5 3 -2 1

 4 5 6 = 0 -3 1 -1 = - 28 -2 1 3 = -12

 7 8 9 2 0 -2 2 0 -2

Питання для самоконтролю:

1. Дайте означення визначника n-го порядку.

2. Як обчислюють визначники 2-го та 3-го порядку ?

3. Дайте означення оберненої матриці. Як вона знаходиться?

**Матричний спосіб розв’язування системи рівнянь**

План:

1. Система лінійних рівнянь. Матрична форма запису.

2. Системи рівнянь: сумісні та несумісні, визначені і невизначені.

 Розв’язок системи: частинний та загальний.

3. Матричний спосіб розв’язування системи лінійних рівнянь.

4. Приклади.

**1.** Система m рівнянь з n невідомими має вигляд

а11х1 + а12х2 + . . . . .+ а1nxn = в1

а21х1 + а22х2 + . . . . .+ а2nxn = в2

 аmх1 + аm2х2 + . . . . .+ аmnxn = вm

Система має матричну форму запису, якщо

A = || аіj || , *і =* 1,m j = 1,n

Х = || хj1 || В = || ві1 || , то система має вигляд

А . Х = В

**2.** Система рівнянь називається **сумісною**, якщо вона має розв’язок, якщо не має - **несумісною.**

Сумісна система, що має один розв’язок називається **визначеною**, більше ніж один – **невизначеною.**

У випадку, коли система невизначена, кожний її розвиток називають **частинним розв’язком системи.**

Множина всіх розв’язків називається **загальним розв’язком.**

**3.** Нехай в системі рівнянь m = n, тоді А – квадратна матриця порядку n. Матричний запис системи

А . Х = В

Якщо |А| = 0, то існує обернена матриця А-1

 Помножимо рівність зліва на А-1

А-1 . А . Х = А-1 . В

Оскільки А-1 . А = Е,

 Е . Х = Х, то маємо

Х = А-1 . В

**Х = А-1 . В**

**Матричний спосіб розв’язування системи лінійних рівнянь**

Приклад: розв’язати систему рівнянь

$\left\{\begin{array}{c}х\_{1}+х\_{2}+х\_{3} =1\\ х\_{1}-х\_{2}+2х\_{3}=-5\\ 4х\_{1}+х\_{2}+4х\_{3}=-2\end{array}\right.$

 В = $\left(\begin{matrix} 1\\-5\\-2\end{matrix}\right)$ А = $\left(\begin{matrix}1&1&1\\1&-1&2\\4&1&4\end{matrix}\right)$

|А| = 3≠ 0 , отже існує обернена матриця А-1

А11 = $\left|\begin{matrix}-1&2\\ 1&4\end{matrix}\right|$= - 6 А21 = $\left|\begin{matrix}1&1\\ 1&4\end{matrix}\right|$ = -3 А31 = $\left|\begin{matrix}1&1\\ -1&2\end{matrix}\right|$ = 3

А12 = $\left|\begin{matrix}1&2\\ 4&4\end{matrix}\right|$ = 4 А22 = $\left|\begin{matrix}1&1\\ 4&4\end{matrix}\right|$ = 0 А32 = $\left|\begin{matrix}1&1\\ 1&2\end{matrix}\right|$ = -1

А 13 = $\left|\begin{matrix}1&-1\\ 4&1\end{matrix}\right|$ = 5 А23 = $\left|\begin{matrix}1&1\\ 4&1\end{matrix}\right|$ = 3 А33 = $\left|\begin{matrix}1&1\\ 1&-1\end{matrix}\right|$ = -2

 -6 -3 3

А-1= $\frac{1}{3} $× 4 0 -1

 5 3 -2

 -6 -3 3 1 -6.1+(-3).(-5) +3.(-2)

 X = $\frac{1}{3} $× 4 0 -1 × -5 = $\frac{1}{3}$ × 4.1+ 0.(-5) + (-1).(-2) =

 5 3 -2 -2 5.1 +3.(-5) + (-2).(-2)

 3

$\frac{1}{3}$ × 6

 -6

х1 =1 х2 = 2 х3 = -2

**4. Приклади:**

Розв’язати систему лінійних рівнянь матричним методом

2х1 + х2 + х3  = 2

5х1 + х2 + 3х3  = 14

 2х1 + х2 + 2х3 = 5

3х1 + 2х2  - х3  = 4

 х1 - 3х2 + 2х3  = 5

 2х1 + х2  - 3х3 = 3

Питання для самоконтролю:

1. Які системи рівнянь називаються сумісними ?

2. Які системи рівнянь називаються визначеними ?

3. Як розв’язати систему рівнянь матричним способом ?

**Загальна теорія систем лінійних рівнянь. Метод Гауса**

План:

 1. Мінор матриці, ранг матриці та його основні властивості.

 2. Елементарні перетворення матриці.

 3. Теорема Кронекера – Капеллі.

 4. Системи однорідних та неоднорідних лінійних рівнянь. Зв’язок

 розв’язків однорідної та неоднорідної систем лінійних рівнянь.

 5. Метод Гауса.

 **1.** Нехай А – матриця розміру m × n. Виберемо в ній довільно k стовпців і k рядків. Отримаємо квадратну матрицю k-го порядку.

 **Мінором** k-го порядкуматриці  А називають визначник квадратної матриці, елементи якої знаходяться на перетині k рядків і k стовпців, обраних довільно.

**Рангом матриці**  називається найбільший із порядків її мінорів, відмінних від нуля.

 а11  а12 а13. . . а1n

 a21 a22 а23. . . a2n

А = а31 a32 а33. . . a3n

а41 a42 а34 . . . an

**. . . . . . . .**

 am1 am2 аm3 . . . amn

**2.**  До елементарних перетворень матриці відносяться:

* перестановка двох довільних рядків (стовпців)
* множення рядка (стовпця) на відмінне від нуля число
* додавання до елементів в будь-якого рядка (стовпця) матриці відповідних елементів іншого рядка (стовпця)

Дві матриці називаються **еквівалентними**, якщо одна отримується з

іншої за допомогою елементарних перетворень. Ранг еквівалентних матриць рівний.

 **Канонічною** матрицею називається матриця, у якої на початку головної діагоналі стоять підряд декілька одиниць, а всі інші елементи дорівнюють нулю. За допомогою елементарних перетворень кожну матрицю можна звести до канонічного вигляду.

Ранг канонічної матриці дорівнює кількості одиниць на діагоналі.

**3. Теорема Кронекера- Капеллі:**

Система лінійних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці дорівнює рангу основної матриці.

Наслідки:

* *Якщо ранг сумісної системи дорівнює кількості невідомих, то система має єдиний розв’язок;*
* *Якщо ранг системи менший від кількості невідомих, то система має безліч розв’язків.*

 **4.** Лінійна система називається **однорідною**, якщо В=О, тобто

А× Х =О

 Однорідна система має вигляд

 а11х1 + . . . + а1nхn = 0

 аm1x1 + . . . + amnxn = 0

Ця система сумісна, бо ранг розширеної матриці дорівнює рангові основної матриці.

Система завжди має нульовий розв’язок

х1 = х2 = . . . = хn = 0

який називають **тривіальним.**

 **Теорема.** Для того, щоб система мала нетривіальний розв’язок необхідно і достатньо, щоб ранг цієї системи був менший за кількість невідомих.

 **Теорема.** Для того, щоб система однорідних рівнянь, в якій кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих, мала нетривіальний розв’язок, необхідно і достатньо, щоб її визначник дорівнював 0.

 Якщо в неоднорідній системі лінійних рівнянь замінити всі вільні члени нулями, то отримаємо однорідну систему рівнянь, яка називається **зведеною** системою для вихідної неоднорідної системи. Між розв'язками неоднорідної системи і відповідної їй зведеної системи існує зв'язок .

 **Теорема.** Сума довільного розв'язку неоднорідної системи і довільного розв'язку відповідної її зведеної системи є розв’язком неоднорідної системи.

 **Теорема.** Різниця двох довільних розв’язків неоднорідної системи є розв’язком її зведеної системи.

 Загальний розв'язок неоднорідної системи можна отримати, якщо до будь- якого частинного розв'язку цієї системи додати загальний розв'язок її зведеної системи.

 **5.** **Метод Гауса -**  полягає у поступовому виключенні невідомих.

* Якщо система має єдиний розв’язок, система зводиться до трикутної.
* Якщо система невизначена (має більше ніж один розв’язок) в останньому рядку залишиться більше ніж одна невідома
* Якщо система несумісна, вона буде мати рівняння вигляд 0=1

Приклад:

Дослідити на сумісність і розв’язати систему лінійних рівнянь

 х1 + х2  - 2х3 = 6

2х1 + 3х2 - 7х3 = 16

5х1 + 2х2 + х3 = 16

 1 1 -2 6 1 1 -2 6 1 1 -2 6 1 1 -2 6

 2 3 -7 16 ~ 0 1 -3 4 ~ 0 1 -3 4 ~ 0 1 -3 4 ~

 5 2 1 16 0 -3 11 -14 0 0 2 -2 0 0 1 -1

 1 1 -2 6 1 1 0 4 1 0 0 3 1 0 0 0

~ 0 1 0 1 ~ 0 1 0 1 ~ 0 1 0 1 ~ 0 1 0 0

 0 0 1 -1 0 0 1 -1 0 0 1 -1 0 0 1 0

 ~

Rg A = RgA = 3

Cистема сумісна і має єдиний розв’язок

 х1 = 3 х2 = 1 х3 = -1

Питання для самоконтролю:

1. Дайте означення рангу матриці.

2. Які перетворення матриці відносяться до елементарних ?

3. Які системи рівнянь називаються однорідними 7

4. В чому полягає метод Гауса ?

**Правило Крамера**

План:

1. Матричні рівняння.
2. Правило Крамера.
3. Приклади.

**1. Матричним** рівнянням будемо називати рівняння вигляду

**АХ=В**

чи

ХА=В,

де А та В – задані квадратні матриці n- го порядку, а Х – невідома матриця того ж порядку.

Розв’язком матричного рівняння називається кожна матриця відповідного порядку, яка, будучи підставлена в матричне рівняння замість Х, перетворює рівняння в тотожність.

Якщо det А$ \ne $ 0, то матричне рівняння має єдиний розв’язок. Дійсно, якщо помножити рівняння відповідно зліва і справа на матрицю А-1, то отримаємо

А-1АХ= А-1В, або Х = А-1В,

і

ХА А-1= В А-1, або Х = В А-1

Матриці А-1В та В А-1 є розв’язками рівнянь.

Приклад.

Розв’язати матричне рівняння

$\left‖\begin{matrix}3&4\\1&1\end{matrix}\right‖$ .Х =$\left‖\begin{matrix}2&9\\1&3\end{matrix}\right‖$

Маємо

А = $\left‖\begin{matrix}3&4\\1&1\end{matrix}\right‖$, В = $\left‖\begin{matrix}2&9\\1&3\end{matrix}\right‖$

det А = -1, отже, існує А-1

А-1= $\left‖\begin{matrix}-1&4\\1&-3\end{matrix}\right‖$. Тоді

 Х = А-1В = $\left‖\begin{matrix}-1&4\\1&-3\end{matrix}\right‖$. $\left‖\begin{matrix}2&9\\1&3\end{matrix}\right‖$ = $\left‖\begin{matrix}2&3\\-1&0\end{matrix}\right‖$

**2. Правило Крамера**

Нехай

 а11х1 + а12х2 + . . . . .+ а1nxn = в1

 а21х1 + а22х2 + . . . . .+ а2nxn = в2

 аm1х1 + аm2х2 + . . . . .+ аmnxn = вm

- система n рівнянь з n невідомими. Визначник основної матриці А системи позначимо через $∆$, тобто

$∆$ = det А = $\left|\begin{matrix}а\_{11}&а\_{12}…&а\_{1n}\\а\_{21}&а\_{22}…&а\_{2n}\\.&.&.\\а\_{m1}&а\_{m2…}&а\_{mn}\end{matrix}\right|$

Замінюємо у визначнику $∆$ будь – який стовпець, наприклад, 2-й, стовпцем з вільних членів. Отриманий таким способом визначник будемо позначати через $∆\_{2}$, тобто

$∆\_{2}$ = $\left|\begin{matrix}а\_{11}&b\_{1}…&а\_{1n}\\а\_{21}&b\_{2}…&а\_{2n}\\.&.&.\\а\_{m1}&b\_{m…}&а\_{mn}\end{matrix}\right|$

*Теорема***. Правило Крамера**:

Якщо визначник системи основної матриці відмінний від нуля, то система сумісна і має єдиний розв’язок, який знаходиться за формулами

$х\_{і}$ **=** $\frac{∆\_{і}}{∆}$

Ці формули називаються **формулами Крамера**.

**3. Приклади:**

Розв’язати за допомогою формул Крамера систему рівнянь

$$\left\{\begin{array}{c}\begin{matrix}х\_{1}-&\begin{matrix}х\_{2}+&\begin{matrix}х\_{3}=&5\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\\\begin{matrix}2х\_{1}&+\begin{matrix}х\_{2}+&\begin{matrix}х\_{3}=&6\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\\\begin{matrix}х\_{1}+&х\_{2}\end{matrix}\begin{matrix} +&\begin{matrix}2х\_{3}=&4\end{matrix}\end{matrix}\end{array}\right.$$

Визначник основної матриці

$∆$ = $\left|\begin{matrix}1&-1&1\\2&1&1\\1&1&2\end{matrix}\right|$ = 5 $\ne $ 0

Отже, система сумісна та має єдиний розв’язок.

$∆\_{1}$= $\left|\begin{matrix}5&-1&1\\6&1&1\\4&1&2\end{matrix}\right|$ = 15

$∆\_{2}$= $\left|\begin{matrix}1&5&1\\2&6&1\\1&4&2\end{matrix}\right|$= -5

$∆\_{3}$= $\left|\begin{matrix}1&-1&5\\2&1&6\\1&1&4\end{matrix}\right|$= 5

Маємо,

$х\_{1}$= $\frac{∆\_{1} }{∆} $= $\frac{15}{5}$= 3 $х\_{2}$= $\frac{∆\_{1}}{∆} $ = $\frac{-5}{5}$ = -1$ х\_{3}$ = $\frac{∆\_{3 }}{∆ } $= $\frac{5}{5}$ = 1

Питання для самоконтролю:

1. Як розв’язати матричні рівняння ?
2. В чому полягає метод Крамера ?